

Künnethformeln der Čechschen
Cohomologietheorie
über kompakten Räumen

von

Gerhard Goos
aus Nürnberg



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548813_0096

Künnethformeln der Čechschen Cohomologietheorie
über kompakten Räumen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades
vorgelegt von
Gerhard Goos
aus Nürnberg

Erlangen 1965

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 19.5.1965

Dekan: Universitätsprofessor Dr. Th. Ernst

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. G. Nöbeling

Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. W. Specht

Inhaltsübersicht

Einleitung	2
Kap.I Čechsche Cohomologietheorie parakompakter	
Räume	4
§1 Cohomologie einer Überdeckung	4
§2 Lokalendliche Überdeckungen	8
§3 Cohomologie parakompakter Räume	14
§4 Der Isomorphiesatz	23
Kap.II Künnethformeln für kompakte Räume	26
§5 Homologische Algebra	26
§6 Eine Künnethformel mit Koeffizienten in Moduln	29
§7 Eine Künnethformel mit Koeffizienten in Garben	33
Literatur	38

Einleitung.

In der Čech'schen Cohomologietheorie interessiert man sich wie in anderen Cohomologietheorien für die Frage, unter welchen Bedingungen für die Cohomologiemoduln des kartesischen Produkts zweier Räume eine Künnethformel

$$0 \rightarrow \Sigma H^p(X) \otimes H^q(Y) \rightarrow H^n(X \times Y) \rightarrow \Sigma \operatorname{Tor}_1(H^p(X), H^q(Y)) \rightarrow 0$$

gilt.

Wir untersuchen diese Frage hier für kompakte Räume, wobei wir die Cohomologie mit Koeffizienten in Moduln und in Garben betrachten. Es ergibt sich, dass die Künnethformel gültig ist, sofern diese Moduln bzw. die Schnittmoduln der Garben torsionsfreie Moduln über einem Dedekindring R sind.

Bei der Anwendung von Sätzen der homologischen Algebra auf dieses Problem ergeben sich Schwierigkeiten, weil nach der üblichen Definition die Čech'sche Cohomologie nicht aus einem algebraischen Cokettenkomplex erhalten werden kann. Um einen solchen Komplex zu bekommen, muss man sich auf die Betrachtung spezieller Überdeckungen beschränken und für diese eine Verschärfung der Verfeinerungsrelation definieren. Diese Methode hat etwa Godement in [4] angewandt. Nach dem gleichen Prinzip arbeitet ein Verfahren, welches für kompakte Räume von G. Nöbeling in [7] beschrieben wurde. Letzteres Verfahren benutzen wir, um im ersten Teil der Arbeit die Čech'sche Cohomologietheorie parakompakter Räume zu entwickeln. Verwendet man eine Garbe als Koeffizientensystem, so wird gezeigt, dass sich die Cokettenmoduln als Schnittmoduln einer azyklischen Auflösung der Garbe gewinnen

nen lassen. Damit erhält man neue Beweise für die bekannten Sätze, wonach die Čech'sche Cohomologietheorie mit Koeffizienten in einer Garbe für parakompakte Räume exakt und identisch mit der durch welche Garbenauflösungen definierten Theorie ist.

Alle vorkommenden Moduln und Garben seien R -Moduln bzw. R -Garben über einem kommutativen Ring R mit Einselement. Unter einem Homomorphismus werde stets ein R -Homomorphismus verstanden. Ebenso ist das Tensorprodukt und seine Derivierten über R zu bilden. Da R kommutativ ist, ergeben sich hierbei wieder R -Moduln. Da die höheren Derivierten nicht auftreten, schreiben wir kurz Tor statt Tor_1 . Die Begriffe "kompakt" und "parakompakt" sind im Sinne Bourbakis aufzufassen, schliessen also das Hausdorff'sche Trennungsaxiom ein.

Herrn Prof. Dr. G.Nöbeling danke ich für Anregungen und Ratschläge zu dieser Arbeit.

Kapitel I Čechsche Cohomologietheorie parakompakter Räume.

Wir entwickeln in §3 eine Theorie mit Koeffizienten in einer Prägarbe, die sich in §4 mittels elementarer Rechnung als identisch mit der Čechschen Theorie erweist. Zuvor stellen wir in §1 bekannte Sätze über die Cohomologie einer Überdeckung zusammen und beweisen in §2 eine Reihe von Hilfssätzen.

Alle Überdeckungen seien offen; ebenso verstehen wir unter einer Umgebung stets eine offene Umgebung.

§1 Cohomologie einer Überdeckung.

Wir referieren hier Definitionen und Sätze aus [4], Kap.II.

Die Bezeichnungen entsprechen zum Teil denen von [3].

Es sei A eine R -Prägarbe über dem topologischen Raum X .

Die Projektionen $A(U) \rightarrow A(V)$ für $V \subseteq U \subseteq X$ seien mit π_V^U bezeichnet. Für $a \in A(U)$ schreiben wir statt $a' = \pi_V^U a$ auch $a' = a|_V$. Diese Schreibweise verwenden wir auch für sämtliche noch zu definierenden Prägarben und Garben.

Ist $\alpha = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so sei

$$(1.1) \quad \alpha \cap U = \{U \cap U_i \mid U_i \in \alpha\}$$

für $U \subseteq X$ gesetzt.

Die Nerven der Überdeckungen α und $\alpha \cap U$ seien mit X_α bzw.

U_α bezeichnet. Ein $(p+1)$ -tupel $s^p = \{U_{i_0}, \dots, U_{i_p}\}$ ist ein p -Simplex von X_α , wenn der Träger

$$\sigma(s^p) = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$$

nichtleer ist. s^p gehört zu dem abgeschlossenen Unterkomplex U_α , wenn $\sigma(s^p) \cap U \neq \emptyset$.

Statt $\sigma(s^p)$ schreiben wir auch kurz σ^p oder σ .

Ist U offen in X und ordnen wir jedem $s^p \in U_\alpha$ den Modul $A(\sigma^p \cap U)$ zu, so erhalten wir ein System lokaler Koeffizienten über U_α . Der p -te Cokettenmodul von U_α ist dann das direkte Produkt aller dieser Koeffizientenmoduln:

$$(1.2) \quad C^p(\alpha; A)(U) = \prod_{s^p \in U_\alpha} A(\sigma^p \cap U).$$

Ist $U = X$, so schreiben wir nur C_α^p oder $C^p(\alpha; A)$.

Für $V \subseteq U$ erzeugen die Beschränkungshomomorphismen π einen Homomorphismus

$$(1.3) \quad t_V^U: C_\alpha^p(U) \rightarrow C_\alpha^p(V),$$

der die üblichen Transitivitätsbeziehungen erfüllt. Daher liefert die Zuordnung $U \rightarrow C_\alpha^p(U)$ eine Prägarbe über X , welche $\mathcal{C}_\alpha^p$ oder $\mathcal{C}^p(\alpha; A)$ heißen möge. Ist A eine Garbe, so auch $\mathcal{C}^p(\alpha; A)$ und C_α^p ist der Modul der globalen Schnitte:

$$(1.4) \quad C^p(\alpha; A) = \Gamma(\mathcal{C}^p(\alpha; A)).$$

Ist $s_j^p \in U_\alpha$ die j -te Seite von $s^{p+1} \in U_\alpha$, ($j = 0, \dots, p+1$)

und nimmt die Cokette $c \in C_\alpha^p(U)$ auf den s_j^p die Werte

$c(s_j^p) \in A(\sigma_j^p \cap U)$ an, so wird durch

$$(1.5) \quad \delta c(s^{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c(s_j^p) |_{\sigma^{p+1} \cap U}$$

der Corandoperator $\delta: C_\alpha^p(U) \rightarrow C_\alpha^{p+1}(U)$ definiert. Da er mit

den Homomorphismen (1.3) vertauschbar ist, überträgt sich

die Definition auf die ganze Prägarbe $\mathcal{C}_\alpha^p$ und wir erhalten

Komplexe $\mathcal{C}_\alpha^* = \mathcal{C}^*(\alpha; A) = \{\mathcal{C}_\alpha^p\}_{p \geq 0}$ und $C_\alpha^* = C^*(\alpha; A) = \{C_\alpha^p\}_{p \geq 0}$.

Wegen $\delta\delta = 0$ bekommen wir aus C_α^* Cohomologiemoduln, die wir H_α^p oder $H^p(\alpha; A)$ nennen.

Definieren wir einen Homomorphismus $\eta: A \rightarrow \mathcal{C}^0(\alpha; A)$

durch die Festsetzung: das Bild von $a \in A(U)$ sei die Null-

cokette, welche auf $s^0 \in U_\alpha$ den Wert $a|_{\sigma^0 \cap U}$ annimmt, so gilt

Satz 1.1 Ist A eine Garbe, so ist folgende Sequenz exakt:

$$(1.6) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0(\alpha; A) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\alpha; A) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Durch Anwendung des linksexakten Funktors Γ der globalen Schnitte folgt hieraus

Satz 1.2 Es ist $H^0(\alpha; A) \simeq Z^0(\alpha; A) \simeq \Gamma(A)$.¹⁾

Schliesslich benötigen wir noch

Satz 1.3 Ist die Garbe A welk, so gilt $H^p(\alpha; A) = 0$ für $p \geq$

Es sei nun $\beta > \alpha$ eine Verfeinerung von α , $\beta = \{V_j\}_{j \in J}$ und $\tau: J \rightarrow I$ eine Zuordnung mit der Eigenschaft $V_j \subseteq U_{\tau j}$. Dann erhalten wir für $U \subseteq X$ eine simpliziale Abbildung $U_\beta \rightarrow U_\alpha$ und daraus einen Prägarbenhomomorphismus

$$(1.7) \quad \rho_\beta^\alpha: \mathcal{C}^p(\alpha; A) \rightarrow \mathcal{C}^p(\beta; A).$$

Dieser hat die Eigenschaft

$$(1.8) \quad \rho_\beta^\alpha \delta = \delta \rho_\beta^\alpha$$

und induziert daher einen Homomorphismus

$$(1.9) \quad \rho_\beta^{\alpha*}: H^p(\alpha; A) \rightarrow H^p(\beta; A).$$

Es gilt dann

Satz 1.4 $\rho_\beta^{\alpha*}$ ist unabhängig von der Wahl der Zuordnung τ .

Liegen Prägarbenhomomorphismen $f, f': A \rightarrow A'$ und $g: A' \rightarrow A''$ vor, so erhalten wir durch Bildung direkter Produkte

Homomorphismen

1) Wie üblich bezeichnen wir mit Z^p bzw. B^p den Kern und das Bild des Corandoperators. Weiter sei $Z^{p,p} = C^p/B^p$ und $B^{p,p} = C^p/Z^{p,p}$ Cokern und Cobild von δ . Es gilt dann $B^{p,p} \simeq B^{p+1}$.

$$(1.10) \quad f_{\alpha}^{\#}: \mathcal{C}^P(\alpha; A) \rightarrow \mathcal{C}^P(\alpha; A')$$

mit den Eigenschaften

$$(1.11) \quad f_{\alpha}^{\#} \delta = \delta f_{\alpha}^{\#}$$

$$(1.12) \quad (f + f')_{\alpha}^{\#} = f_{\alpha}^{\#} + f'_{\alpha}^{\#}$$

$$(1.13) \quad (g \cdot f)_{\alpha}^{\#} = g_{\alpha}^{\#} \cdot f_{\alpha}^{\#}.$$

Aus (1.11) ergibt sich die Existenz eines Homomorphismus

$$(1.14) \quad f_{\alpha}^*: H^P(\alpha; A) \rightarrow H^P(\alpha; A'),$$

für den die analogen Beziehungen gelten.

Sind zusätzlich Homomorphismen (1.7) bzw. (1.9) gegeben, so gilt:

$$(1.15) \quad f_{\beta}^{\#} \cdot \rho_{\beta}^{\alpha} = \rho_{\beta}^{\alpha} \cdot f_{\alpha}^{\#}$$

$$(1.16) \quad f_{\beta}^* \cdot \rho_{\beta}^{\alpha} = \rho_{\beta}^{\alpha} \cdot f_{\alpha}^*.$$

(1.12) und (1.13) beweisen nun

Satz 1.5 $\mathcal{C}^P(\alpha; A)$, $C^P(\alpha; A)$ und $H^P(\alpha; A)$ sind additive kovariante Funktoren auf der Kategorie der R-Prägarben mit Werten in der Kategorie der R-Prägarben bzw. R-Moduln.

Man kann diese Funktoren auch auffassen als Funktoren auf der Kategorie der R-Garben mit Werten in der Kategorie der R-Garben bzw. R-Moduln. Da die Exaktheit bei Garben und Prägarben verschieden definiert ist, erhalten wir dann folgende unterschiedliche Resultate:

Satz 1.6 (1) Der Funktor $\mathcal{C}^P(\alpha; A)$ ist exakt auf der Kategorie der R-Prägarben; für R-Garben ist er nur exakt, wenn α lokalendlich ist.

(2) Der Funktor $C^P(\alpha; A)$ ist exakt auf der Kategorie der R-Prägarben und linksexakt für R-Garben.

§2 Lokalendliche Überdeckungen.

A. Es sei X ein parakompakter Raum. Dann besitzt jede offene Überdeckung von X eine lokalendliche Verfeinerung, d.h. die lokalendlichen Überdeckungen sind konfinal im System der offenen Überdeckungen.¹⁾

Wir definieren nun eine Verschärfung der Verfeinerungsrelation:²⁾

Definition: Sind α, β offene Überdeckungen von X und gilt

$$(2.1) \quad \alpha < \beta,$$

$$(2.2) \quad \text{Es ist } U \cap V \in \beta, \text{ wenn } U \in \alpha, V \in \beta, U \cap V \neq \emptyset, \\ \text{so hei\ss e } \beta \text{ wesentlich feiner als } \alpha. \text{ Hierf\ur } \\ \text{schreiben wir } \alpha \ll \beta.$$

Diese Relation ist transitiv: Ist n\u00e4mlich $\alpha \ll \beta \ll \gamma$, so gilt $\alpha < \gamma$. Ist aber $U \in \alpha, W \in \gamma$ und $U \cap W \neq \emptyset$, so gibt es ein $V \in \beta$ mit $W \subseteq V$ und nach (2.2) gilt $V' = U \cap V \in \beta$. Dann ist $U \cap W = V' \cap W \in \gamma$ und folglich $\alpha \ll \gamma$.

Die Relation ist jedoch nur reflexiv f\u00fcr \u00dcberdeckungen, welche die folgende Forderung (2.4) erf\u00fcllen.

Definition: Es sei $\text{Co}(X)$ die Menge der offenen \u00dcberdeckungen welche den folgenden Bedingungen gen\u00fcgt:

$$(2.3) \quad \alpha \text{ ist lokalendlich}$$

$$(2.4) \quad \text{Es ist } U \cap V \in \alpha, \text{ wenn } U, V \in \alpha \text{ und } U \cap V \neq \emptyset.$$

Die Menge $\text{Co}(X)$ ist nun konfinal im System der \u00dcberdeckungen

1) Auf die logischen Schwierigkeiten des Begriffs "Menge" von \u00dcberdeckungen gehen wir hier nicht ein.

2) Die Definitionen und S\u00e4tze des Abschnitts A wurden zuerst von G.N\u00f6beling in [7] f\u00fcr kompakte R\u00e4ume ausgesprochen.

Satz 2.1 (1) Zu jeder offenen lokalendlichen Überdeckung α existiert eine wesentliche Verfeinerung $\beta \in \text{Co}(X)$.

(2) Zu jeder offenen Überdeckung α existiert eine Verfeinerung $\beta \in \text{Co}(X)$.

Beweis zu (1): Da nur jeweils endlich viele verschiedene Mengen von α einen gemeinsamen nichtleeren Durchschnitt haben können, erhalten wir eine lokalendliche offene Verfeinerung β , wenn wir zu den Mengen von α noch diese Durchschnitte hinzunehmen. Damit sind dann auch (2.2) und (2.4) erfüllt, also $\alpha \ll \beta$ und $\beta \in \text{Co}(X)$. Hieraus und der Vorbemerkung des Paragraphen folgt dann auch (2).

Satz 2.2 Die Menge $\text{Co}(X)$ ist bezüglich der Relation $\ll$ gerichtet.

Wir haben die Existenz einer gemeinsamen wesentlichen Verfeinerung $\gamma \in \text{Co}(X)$ zu gegebenen $\alpha, \beta \in \text{Co}(X)$ zu zeigen.

Setzen wir $\gamma = \{ W \mid W = U \cap V, U \in \alpha, V \in \beta \}$, so folgt aus $W \cap W' = (U \cap U') \cap (V \cap V') \in \gamma$,¹⁾ dass γ (2.4) erfüllt.

Ebenso ergibt sich (2.2) und $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$ ist trivial. Nun existiert zu jedem $x \in X$ eine Umgebung S_x , welche nur mit endlich vielen $U \in \alpha$ und $V \in \beta$ einen nichtleeren Durchschnitt hat. Dann schneidet S_x auch nur endlich viele $W \in \gamma$. Daher ist γ lokalendlich und es ist alles gezeigt.

Sei nun $\alpha \ll \beta$ und $\alpha \in \text{Co}(X)$. Zu $V \in \beta$ gibt es dann nur endlich viele $U \in \alpha$ mit $V \subseteq U$ und nach (2.4) liegt deren Durchschnitt wieder in α . Durch

$$(2.5) \quad \tau_{\beta}^{\alpha} V = \bigcap_{V \subseteq U} U \text{ für } V \in \beta$$

1) Natürlich wird hier und im folgenden stillschweigend die Annahme gemacht, dass diese Durchschnitte nichtleer sind.

wird daher eine ausgezeichnete Zuordnung

$$(2.6) \quad \tau_{\beta}^{\alpha}: \beta \rightarrow \alpha$$

definiert, welche mittels

$$(2.7) \quad \tau_{\beta}^{\alpha} s_{\beta}^p = \tau_{\beta}^{\alpha} \{V_{i_0}, \dots, V_{i_p}\} = \{\tau_{\beta}^{\alpha} V_{i_0}, \dots, \tau_{\beta}^{\alpha} V_{i_p}\}$$

eine simpliziale Abbildung $U_{\beta} \rightarrow U_{\alpha}$ liefert für $U \subseteq X$.

Diese bezeichnen wir ebenfalls mit τ_{β}^{α} .

Satz 2.3 Es gilt

$$(2.8) \quad \tau_{\alpha}^{\alpha} = \text{id.} \quad 1)$$

$$(2.9) \quad \tau_{\beta}^{\alpha} \tau_{\gamma}^{\beta} = \tau_{\gamma}^{\alpha} \text{ für } \alpha \ll \beta \ll \gamma \text{ und } \alpha, \beta \in \text{Co}(X).$$

(2.8) ist trivial. Zum Beweis von (2.9) sei $W \in \gamma$ und

$V = \tau_{\gamma}^{\beta} W$. Aus (2.5) erhalten wir dann $W \subseteq U_0 = \tau_{\gamma}^{\alpha} W \subseteq U_1 = \tau_{\beta}^{\alpha} V$.

Weiter ergibt sich aus $W \subseteq U_0 \cap V \in \beta$ $V \subseteq U_0 \cap V \subseteq U_0$, also

$U_1 \subseteq U_0$. Dies beweist $U_0 = U_1$, was auch zu zeigen war.

Bemerkungen: (1) Die Forderung (2.2) wurde nur eingeführt um (2.9) beweisen zu können. (2) Ist σ^p der Träger von $s^p \in X_{\beta}$, so ist nach (2.4) $\sigma^p \in s$. Hingegen gilt im allgemeinen nur $\tau_{\beta}^{\alpha} \sigma^p \subseteq \sigma(\tau_{\beta}^{\alpha} s^p)$. (3) Definiert man $\text{Co}(X)$ als das System der offenen Überdeckungen, die mit beliebig vielen Mengen U auch den offenen Kern von deren Durchschnitt enthalten, so können die Ergebnisse der nächsten beiden Paragraphen teilweise auf beliebige Hausdorffräume übertragen werden.

B. Es sei wieder X parakompakt. Dann besitzt jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Schrumpfung, d.h. eine Verfeinerung $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ mit der gleichen Indexmenge I , so dass für alle $i \in I$ gilt $V_i \subseteq \bar{V}_i \subseteq U_i$.²⁾

1) id bezeichne jede Art von identischer Zuordnung.

2) $\bar{V}$ sei die abgeschlossene Hülle von V in X .

Lemma 2.4 Ist $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I} \in \text{Co}(X)$, so existiert eine Schrumpfung $\mathcal{W} = \{V_i\}_{i \in I}$ von $\mathcal{U}$ mit der Eigenschaft:

(2.10) Ist $U_k = U_i \cap U_j$, so gilt $V_i \cap V_j \subseteq V_k$.

Beweis: I. Unterscheiden wir die Indizes $i, j \in I$ nicht, wenn $U_i = U_j$, so können wir I eindeutig in höchstens abzählbar viele disjunkte Teilmengen I^n zerlegen:

(2.11) $I = I^0 \cup I^1 \cup \dots \cup I^n \cup \dots$ $I^n \cap I^m = \emptyset$, wenn $n \neq m$.

Dabei gehöre $i \in I$ genau dann zu I^n , wenn es n verschiedene U_j gibt mit $U_i \subseteq U_j$ und $U_i \neq U_j$. Da $\mathcal{U}$ lokalendlich ist, kann es für jedes $i \in I$ nur endlich viele solche j geben und diese gehören dann zu einer der Klassen $I^0, \dots, I^{n-1}$, falls $i \in I^n$.

II. Es sei nun $U_k = U_i \cap U_j$ und $k \in I^n$; dann gilt entweder

(2.12) es ist $i \in I^r$ und $j \in I^s$ und $r, s < n$

oder

(2.13) mindestens 2 der Indizes i, j und k sind gleich.

III. Es sei nun $\mathcal{W}' = \{V'_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Schrumpfung von $\mathcal{U}$. Wir konstruieren $\mathcal{W}$ durch vollständige Induktion über die Zerlegung (2.11) und bemerken zuerst, dass (2.10) höchstens dann nicht durch $V_k = V'_k$ befriedigt wird, wenn der Fall (2.12) vorliegt. Daher können wir $V_k = V'_k$ setzen für $k \in I^0$. Haben wir aber V_j für alle $j \in I^m$ mit $m < n$ schon konstruiert und ist $k \in I^n$, so durchlaufe (i, j) die endlich vielen Paare, für welche $U_k = U_i \cap U_j$ und (2.12) gilt. Gibt es keine solchen Paare, so setzen wir $V_k = V'_k$, andernfalls wird durch die Festsetzung $V_k = \bigcup_{(i, j)} (V_i \cap V_j) \cup V'_k$ das Verlangte geleistet.

Lemma 2.5 Es sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ lokalendlich und $\mathfrak{W} = \{V_i\}_{i \in I}$ sei eine Schrumpfung von $\mathfrak{U}$. Ferner sei zu jedem $i \in I$ eine Überdeckung $\alpha_i \in \text{Co}(X)$ gegeben mit der Eigenschaft:

(2.14) Ist $W \in \alpha_i$, so gilt entweder $W \subseteq U_i$ oder $W = X - \bar{V}_i$.
Dann gibt es eine gemeinsame wesentliche Verfeinerung $\beta \in \text{Co}(X)$ aller α_i .

Beweis: I. Es sei $x \in X$ beliebig. Da $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ lokalendlich sind, gibt es eine Umgebung $Y_0(x)$ mit der Eigenschaft:

(2.15) Aus $Y_0(x) \cap V_i \neq \emptyset$ folgt $x \in \bar{V}_i$ und $Y_0(x) \cap U_i \neq \emptyset$
gilt nur für die endlich vielen Indizes $i = i_1, \dots, i_n$.

Für $i = i_1, \dots, i_n$ sei $Y_i(x)$ jeweils eine Umgebung, welche nur endlich viele $W \in \alpha_i$ schneidet. Weiter sei für diese i jeweils ein $W_i \in \alpha_i$ mit $x \in W_i$ fest gewählt. Wir setzen nun

(2.16) $Y(x) = Y_0(x) \cap Y_{i_1}(x) \cap \dots \cap Y_{i_n}(x) \cap W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_n}$.

Dann gilt

- (a) Für $i = i_1, \dots, i_n$ gibt es ein $W_i \in \alpha_i$ mit $Y(x) \subseteq W_i$.
- (b) Für alle anderen $i \in I$ ist $Y(x) \subseteq X - \bar{V}_i \in \alpha_i$ und aus $W \cap Y(x) \neq \emptyset$ und $W \in \alpha_i$ folgt $W = X - \bar{V}_i$.

II. Führen wir diese Konstruktion für alle $x \in X$ durch, so erhalten wir eine offene Überdeckung $\gamma' = \{Y(x)\}_{x \in X}$, welche feiner ist als jedes α_i . Es sei γ eine der nach Satz 2.1 existierenden Verfeinerungen von γ' : $\gamma \in \text{Co}(X)$. Da jedes $Z \in \gamma$ dann in einem $Y(x)$ enthalten ist, folgt aus (a) und (b) sowie aus der Definition der $Y_i(x)$, dass es nur in endlich vielen α_i Mengen W gibt, für welche $W \cap Z \neq \emptyset$, und
1) $X - V$ bezeichne das Komplement von V in X .

dass es jeweils auch nur endlich viele solche W gibt.

Betrachten wir daher die Überdeckung β , welche aus allen Durchschnitten $S = Z \cap W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_j} \cap \dots$ mit $Z \in \gamma$ und $W_{i_j} \in \alpha_{i_j}$ besteht, so folgt aus dem eben Gesagten, dass β offen und lokalendlich ist. Weiter gilt für jedes $i \in I$ $\alpha_i < \gamma' < \gamma < \beta$ und β enthält offenbar alle Durchschnitte, welche zur Erfüllung von (2.2) und (2.4) notwendig sind. Daher ist $\beta \in \text{Co}(X)$ und $\alpha_i \ll \beta$ für alle $i \in I$.

C. Es seien nun X und Y kompakte Räume. Dann ist auch das kartesische Produkt $X \times Y$ kompakt. Ferner ist eine Überdeckung eines kompakten Raumes genau dann endlich, wenn sie lokalendlich ist. Daher bestehen $\text{Co}(X)$, $\text{Co}(Y)$ und $\text{Co}(X \times Y)$ aus den sämtlichen endlichen Überdeckungen, welche (2.4) erfüllen.

Sind α und β Überdeckungen von X bzw. Y , so definieren wir eine Überdeckung von $X \times Y$ durch

$$(2.17) \quad \alpha \times \beta = \{ W \mid W = U \times V, U \in \alpha \text{ und } V \in \beta \}.$$

Lemma 2.6 (1) Es gilt $\alpha \times \beta \in \text{Co}(X \times Y)$ genau dann, wenn $\alpha \in \text{Co}(X)$ und $\beta \in \text{Co}(Y)$.

(2) Sind α, α' und β, β' offene Überdeckungen von X bzw. Y , so ist $\alpha \times \beta \ll \alpha' \times \beta'$ gleichbedeutend mit $\alpha \ll \alpha'$ und $\beta \ll \beta'$.

Der Beweis folgt in trivialer Weise aus der Identität $(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V')$.

Lemma 2.7 Zu jeder offenen Überdeckung γ von $X \times Y$ gibt es Überdeckungen $\alpha \in \text{Co}(X)$ und $\beta \in \text{Co}(Y)$ mit $\gamma < \alpha \times \beta$. Besteht γ nur aus Mengen der Form $U \times V$ und ist γ endlich, so können α und β so gewählt werden,

dass $\gamma \ll \alpha \times \beta$.

Nach Definition der Produkttopologie ist nämlich jedes $W \in \gamma$ Vereinigung von offenen Mengen der Form $U \times V$. Wählen wir unter diesen endlich viele aus, welche $X \times Y$ überdecken, so erhalten wir eine Verfeinerung $\gamma' = \{U_i \times V_i\}_{i=1, \dots, n}$ von γ . Wir setzen nun $\alpha' = \{U_i\}_{i=1, \dots, n}$ und ebenso sei β' definiert. Weiter sei für jedes $x \in X$ S_x der Durchschnitt aller $U_i \in \alpha'$ mit $x \in U_i$ und α'' sei die Überdeckung von X , welche aus den sämtlichen S_x besteht. Nun definieren wir S_y und $\beta'' = \{S_y\}$ analog und wählen Überdeckungen $\alpha \in \text{Co}(X)$ und $\beta \in \text{Co}(Y)$ mit $\alpha' \ll \alpha$, $\alpha'' < \alpha$, $\beta' \ll \beta$ und $\beta'' < \beta$. Dann gilt $\gamma' \ll \alpha \times \beta$. Da nämlich γ' eine Teilüberdeckung von $\alpha' \times \beta'$ ist und nach Lemma 2.6 $\alpha' \times \beta' \ll \alpha \times \beta$ gilt, ist (2.2) sicher auch für γ' und $\alpha \times \beta$ erfüllt. Wir haben also nur noch $\gamma' < \alpha \times \beta$ zu zeigen.

Hierzu sei $U' \times V' \in \alpha \times \beta$. Wegen $\alpha'' \times \beta'' < \alpha \times \beta$ gibt es dann einen Punkt $(x, y) \in X \times Y$ mit $U' \subseteq S_x$ und $V' \subseteq S_y$. Nach Definition von S_x und S_y gilt aber $U' \times V' \subseteq S_x \times S_y \subseteq U_i \times V_j$ für alle $U_i \times V_j$, welche (x, y) enthalten. Da γ' eine Überdeckung von $X \times Y$ ist, gibt es ein solches $U_k \times V_k \in \gamma'$ und damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen. Zum Beweis des zweiten Teils setzen wir $\gamma = \gamma'$ und gehen genauso vor.

§3 Cohomologie parakompakter Räume.

Es sei wieder X ein parakompakter Raum. Sofern keine andere Indexmenge vermerkt ist, bezeichne "lim" den Übergang zum direkten Limes über das gerichtete System $\text{Co}(X)$. Ergibt sich aus dem Zusammenhang nichts anderes, so ist mit einer

Überdeckung stets eine aus $\text{Co}(X)$ gemeint.

Es sei A eine Prägarbe über X , $\alpha, \beta \in \text{Co}(X)$ und $\alpha \ll \beta$. Die in §2 definierten simplizialen Abbildungen $\tau_\beta^\alpha: U_\beta \rightarrow U_\alpha$ sind dann spezielle Zuordnungen τ der in §1 betrachteten Art. Sie induzieren daher einen Homomorphismus ρ_β^α (vgl.(1.7)). Dieser genügt der Beziehung (1.3) und induziert daher einen Homomorphismus $\rho^*\rho_\beta^\alpha$ (vgl.(1.9)).

Satz 3.1 $\{\mathcal{C}_\alpha^p, \rho_\beta^\alpha\}$, $\{C_\alpha^p, \rho_\beta^\alpha\}$ -und $\{H_\alpha^p, \rho^*\rho_\beta^\alpha\}$ sind gerichtete Systeme von Prägarben bzw. Moduln über der Indexmenge $\text{Co}(X)$.

Zum Beweis genügt es das erstgenannte System zu betrachten.

Wir haben die Formeln $\rho_\alpha^\alpha = \text{id}$ und

$$(3.1) \quad \rho_\gamma^\beta \rho_\beta^\alpha = \rho_\gamma^\alpha \quad \text{für } \alpha \ll \beta \ll \gamma$$

nachzuweisen, von denen die erste trivial ist. Zum Beweis von (3.1) sei $U \subseteq X$ offen und s_γ ein p -Simplex von U_γ .

Weiter sei $s_\beta = \tau_\gamma^\beta s_\gamma$ und $s_\alpha = \tau_\gamma^\alpha s_\gamma$. Nach Satz 2.5 ist dann $s_\alpha = \tau_\beta^\alpha s_\beta$. Ist nun $c \in C_\alpha^p(U)$ eine beliebige Cokette, welche auf s_α den Wert $c(s_\alpha) = a \in A(\sigma(s_\alpha) \cap U)$ annimmt, so gilt $\rho_\gamma^\beta \rho_\beta^\alpha c(s_\gamma) = \rho_\beta^\alpha c(s_\beta) | \sigma(s_\gamma) \cap U = a | \sigma(s_\gamma) \cap U = \rho_\gamma^\alpha c(s_\gamma)$. Da s_γ beliebig war, ist damit (3.1) bewiesen.

Gehen wir nun mit diesen Systemen zum direkten Limes über, so erhalten wir für jedes $p \geq 0$ Prägarben bzw. Moduln:

$$(3.2) \quad \mathcal{C}^p(X; A) = \lim \mathcal{C}^p(\alpha; A)$$

$$(3.3) \quad C^p(X; A) = \lim C^p(\alpha; A)$$

$$(3.4) \quad H^p(X; A) = \lim H^p(\alpha; A).$$

Diese bezeichnen wir auch kurz mit $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^p(X)$ oder $\mathcal{C}^p(A)$ usw.. Nach Definition gibt es dann Homomorphismen

$$(3.5) \quad \rho^\alpha: \mathcal{C}^p(\alpha; A) \rightarrow \mathcal{C}^p(X; A) \quad \text{und}$$

$$(3.6) \quad \rho^{\alpha}: H^p(\alpha; A) \rightarrow H^p(X; A)$$

mit der Eigenschaft

$$(3.7) \quad \text{Für } \alpha \ll \beta \text{ gilt } \rho^{\beta} \rho_{\beta}^{\alpha} = \rho^{\alpha} \text{ und } \rho^{\beta} \rho^{\alpha}_{\beta} = \rho^{\alpha}.$$

Aus (1.8) ergibt sich, dass der Corandoperator δ auch im Limes definiert ist und für jedes α die Beziehung

$$(3.8) \quad \rho^{\alpha} \delta = \delta \rho^{\alpha}$$

erfüllt. Daher ist $C^* = \{C^p\}_{p \geq 0}$ ein algebraischer Komplex.

Nun war H^p_{α} definiert mittels der exakten Sequenzen

$$(3.9) \quad 0 \rightarrow Z^p_{\alpha} \rightarrow C^p_{\alpha} \rightarrow B^{p+1}_{\alpha} \rightarrow 0$$

$$(3.10) \quad 0 \rightarrow B^p_{\alpha} \rightarrow Z^p_{\alpha} \rightarrow H^p_{\alpha} \rightarrow 0.$$

Da aber der direkte Limes ein exakter Funktor ist, ergibt sich, indem man mit diesen Sequenzen zum Limes übergeht:

Satz 3.2 Die Moduln $H^p(X; A)$ sind die p -ten Cohomologie-moduln des Komplexes $C^*(X; A)$.

Ist die Prägarbe A bereits eine Garbe, so verwendet man etwas andere Bezeichnungen, da die Zuordnung

$$(3.11) \quad U \mapsto \lim_{\alpha} C^p_{\alpha}(U)$$

dann im allgemeinen nur eine Prägarbe $\mathcal{C}^p$ definiert. In diesem Fall sei $\mathcal{C}^p(X; A)$ die von der Prägarbe $\mathcal{C}^p$ erzeugte Garbe und

$$(3.12) \quad C^p(X; A) = \Gamma(\mathcal{C}^p(X; A)).$$

Es gibt dann einen Prägarbenhomomorphismus $\mu: \mathcal{C}^p \rightarrow \mathcal{C}^p$ und mit den Projektionen $\lambda^{\alpha}: \mathcal{C}^p_{\alpha} \rightarrow \mathcal{C}^p$ lässt sich ein eindeutig bestimmter Garbenhomomorphismus $\rho^{\alpha} = \mu \circ \lambda^{\alpha}$ zusammensetzen, der (3.7) erfüllt.

Damit diese Bezeichnungen sinnvoll sind und insbesondere Satz 3.2 auch in diesem Fall gilt, beweisen wir

Satz 3.3 Der Homomorphismus $\mu(X): \lim C^P(\alpha; A) \rightarrow C^P(X; A)$
ist ein Isomorphismus.

Beweis: I. Damit $\mu(X)$ ein Epimorphismus ist, genügt es nach [4] II, Theorem 3.9.1 folgendes zu zeigen:

Ist $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine lokalendliche Überdeckung von X und ist für jedes $i \in I$ ein $c_i \in \psi^P(U_i)$ gegeben mit

$$(3.13) \quad c_i|_{U_i \cap U_j} = c_j|_{U_i \cap U_j},$$

so existiert ein $c \in \psi^P(X)$ mit $c|_{U_i} = c_i$ für alle $i \in I$.

Es bedeutet keine Einschränkung, wenn wir $\mathcal{U}$ weiter verfeinern. Infolgedessen können wir annehmen $\mathcal{U} \in \text{Co}(X)$ und können später zu einer Schrumpfung übergehen.

Nach Definition des direkten Limes gibt es nun für alle $i \in I$ eine Überdeckung $\alpha_i \in \text{Co}(X)$ und ein $c'_i \in C^P_{\alpha_i}(U_i)$ mit $\lambda^{\alpha_i}(U_i)c'_i = c_i$. Falls $U_i \subseteq U_j$, existiert wegen (3.13) eine gemeinsame wesentliche Verfeinerung γ_{ij} von α_i und α_j mit

$$(3.14) \quad \rho^{\alpha_i}_{\gamma_{ij}} c'_i = \rho^{\alpha_j}_{\gamma_{ij}} c'_j|_{U_i}.$$

II. Nun wählen wir eine Schrumpfung $\mathcal{W} = \{V_i\}_{i \in I}$ von $\mathcal{U}$, welche Lemma 2.4 befriedigt. Wir behaupten, dass wir die α_i so wählen können, dass gilt:

(1) α_i ist wesentlich feiner als die Überdeckung

$$\{U_i, X - \nabla_i, U_i - \nabla_i\}.$$

(2) Falls $U_i \subseteq U_j$, gilt $\alpha_j \ll \alpha_i$ und

$$(3.15) \quad \rho^{\alpha_j}_{\alpha_i} c'_j|_{U_i} = c'_i.$$

Forderung (1) ist trivial zu erfüllen. Zur Befriedigung von

(2) benutzen wir die Zerlegung (2.11) von I : Falls $i \in I^0$, genügt das schon vorhandene α_i , da es kein von U_i verschiedenes U_j gibt. Haben wir aber für alle $i \in I^m$ mit $m < n$ schon α_i konstruiert und gehört nun i zu I^n , so gibt es

genau n von U_i verschiedene Mengen U_j mit $U_i \subseteq U_j$ und die Indizes j liegen in irgendwelchen I^m mit $m < n$, so dass wir die zugehörigen α_j schon konstruiert haben. Aufgrund von (3.14) leistet nun eine gemeinsame wesentliche Verfeinerung der n Überdeckungen γ_{ij} das von α_i Verlangte.

Betrachten wir nun die Überdeckungen

$$(3.16) \beta_i = \{W \mid W \subseteq U_i \text{ und } W \in \alpha_i \text{ oder } W = X - V_i\}.$$

Es gilt $\beta_i \in \text{Co}(X)$ und $\beta_i \ll \alpha_i$ wegen (1). Weiter folgt für $W \in \beta_i$ aus $W \cap V_i \neq \emptyset$ die Beziehung $W \in \alpha_i$. Daher sind die simplizialen Komplexe $V_{i\alpha_i}$ und $V_{i\beta_i}$ identisch und $\rho_{\alpha_i}^{\beta_i}(V_i)$ ist ein Isomorphismus. Es bezeichne $c_i'' \in C_{\beta_i}^D(V_i)$ das Urbild von $c_i' \mid V_i$ unter diesem Isomorphismus.

III. Wir behaupten: Ist $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ und $U_i \cap U_j = U_k$, so gilt für jede wesentliche Verfeinerung γ von β_i , β_j und β_k :

$$(3.17) \rho_Y^{\beta_i} c_i'' \mid V_i \cap V_j = \rho_Y^{\beta_j} c_j'' \mid V_i \cap V_j = \rho_Y^{\beta_k} c_k'' \mid V_i \cap V_j.$$

Nach (2.10) ist $V = V_i \cap V_j \subseteq V_k$, so dass (3.17) sinnvoll ist. Nach (2) ist weiter $\alpha_i \ll \alpha_k$. Es sei nun $Z \in \gamma$, $Z \cap V \neq \emptyset$, sowie $W_i = \tau_Y^{\beta_i} Z$ und $W_k = \tau_Y^{\beta_k} Z$. Aus der Definition von β_i und β_k ergibt sich $W_i \in \alpha_i$ und $W_k \in \alpha_k$. Aus der Definition von $\tau_Y^{\beta_i}$ und $\tau_Y^{\beta_k}$ erhalten wir $W_k = W_i \cap W_k \subseteq W_i$ und damit $\tau_{\alpha_k}^{\alpha_i} W_k = W_i$. Führt man diese Überlegung für alle Ecken Z eines $s_Y \in V_Y$ durch, so erhält man mit den Bezeichnungen $s_i = \tau_Y^{\beta_i} s_Y$ und $s_k = \tau_Y^{\beta_k} s_Y$ die Beziehung $s_i = \tau_{\alpha_k}^{\alpha_i} s_k$. Daher ergibt sich aus (3.15) $c_i''(s_i) \mid \sigma(s_k) \cap V_k = c_k''(s_k)$. Dann sind aber die Beschränkungen dieser beiden Werte auf V erst recht identisch. Da nun s_Y beliebig war, folgt damit die Behauptung bezüglich der Indizes i und k . Für j beweist man (3.17) ebenso.

IV. Die Überdeckungen β_i erfüllen nun die Voraussetzung (2.14) von Lemma 2.5. Daher existiert eine gemeinsame wesentliche Verfeinerung γ der sämtlichen β_i . Da nun $\mathcal{C}_\gamma^P$ eine Garbe ist, folgt aus (3.17), dass die lokalen Schnitte $\rho_{\gamma_i}^{\beta_i} c_i''$ eindeutig einen globalen Schnitt $c_\gamma \in C_\gamma^P$ bestimmen mit $\lambda^\gamma c_\gamma|_{V_i} = c_i|_{V_i}$. Deshalb leistet $c = \lambda^\gamma c_\gamma$ das zu Anfang von c Verlangte und $\mu(X)$ ist ein Epimorphismus.

V. Gäbe es nun ein $c' \in \mathcal{C}'^P(X)$ mit $\mu(X)c' = \mu(X)c$, so folgt daraus, dass $\mu(x): \lim_{x \in W} \mathcal{C}'^P(W) \rightarrow \lim_{x \in W} C^P(W)$ für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist, dass c und c' lokal übereinstimmen.

Es gibt also eine Überdeckung $\mathcal{U}' = \{U_j'\}_{j \in J}$ von X so, dass $(c - c')|_{U_j'} = 0$ ist für jedes $j \in J$. Nun gibt es ein $\gamma' \in \text{Co}(X)$ und ein $c_{\gamma'} \in C_{\gamma'}^P$, mit $\lambda^{\gamma'} c_{\gamma'} = c'$. Aus der lokalen Identität folgt die Existenz von Überdeckungen $\alpha_j' \in \text{Co}(X)$ mit $\gamma \ll \alpha_j'$ und $\gamma' \ll \alpha_j'$ für jedes $j \in J$ so, dass $\rho_{\alpha_j'}^\gamma c_\gamma|_{U_j'} = \rho_{\alpha_j'}^{\gamma'} c_{\gamma'}|_{U_j'}$. Wiederholen wir nun die Schlüsse der Beweisabschnitte II bis IV mit den Überdeckungen $\mathcal{U}'$ und α_j' statt $\mathcal{U}$ und α_i , so gelangen wir zu einer Überdeckung γ'' , von der wir noch annehmen können $\gamma \ll \gamma''$ und $\gamma' \ll \gamma''$ und für die dann gilt $\rho_{\gamma''}^\gamma c_\gamma = \rho_{\gamma''}^{\gamma'} c_{\gamma'}$. Daher ist $c = c'$. Also ist $\mu(X)$ auch ein Monomorphismus und Satz 3.3 ist bewiesen.

Es sei jetzt $f: A \rightarrow A'$ ein Prägarbenhomomorphismus. Nach (1.15) sind dann die induzierten Homomorphismen $f_\alpha^\#$ mit ρ_β^α vertauschbar. Daher können wir mit $f_\alpha^\#$ zum Limes übergehen und erhalten einen Prägarbenhomomorphismus

$$(3.18) \quad f^\#: \mathcal{C}^P(X; A) \rightarrow \mathcal{C}^P(X; A').$$

Den sich daraus ergebenden Homomorphismus $f^\#(X): C^P(A) \rightarrow C^P(A')$

bezeichnen wir ebenfalls mit $f^\#$.

Aus (1.11) und (1.16) folgt

$$(3.19) \quad f^\# \delta = \delta f^\#$$

sowie, dass f einen Homomorphismus

$$(3.20) \quad f^*: H^p(X; A) \rightarrow H^p(X; A')$$

induziert, derart, dass das Diagramm

$$(3.21) \quad \begin{array}{ccc} H^p(\alpha; A) & \xrightarrow{f^*} & H^p(\alpha; A') \\ \downarrow \rho^* \alpha & & \downarrow \rho^* \alpha \\ H^p(X; A) & \xrightarrow{f^*} & H^p(X; A') \end{array}$$

kommutativ ist. Gehen wir mit (1.12) und (1.13) zum direkten Limes über, so erhalten wir

Satz 3.4 $\varphi^p(X; A)$, $C^p(X; A)$ und $H^p(X; A)$ sind additive kovariante Funktoren auf der Kategorie der R -Prägarben bzw. Garben über X .

Sei nun

$$(3.22) \quad 0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Prägarben über X . Beachten wir, dass der direkte Limes ein exakter Funktor ist, so folgt aus Satz 1.6, dass die folgenden Sequenzen exakt sind:

$$(3.23) \quad 0 \rightarrow \varphi^p(X; A') \xrightarrow{f^\#} \varphi^p(X; A) \xrightarrow{g^\#} \varphi^p(X; A'') \rightarrow 0$$

$$(3.24) \quad 0 \rightarrow C^p(X; A') \xrightarrow{f^\#} C^p(X; A) \xrightarrow{g^\#} C^p(X; A'') \rightarrow 0.$$

Ist jedoch (3.22) eine exakte Garbensequenz, so ist zwar

(3.23) wieder exakt. Die Sequenz (3.24) ist jedoch zunächst nur bei $C^p(X; A')$ und $C^p(X; A)$ exakt. Dass $g^\#$ ein Epimorphismus ist, müssen wir noch beweisen.

Hierzu sei $c'' \in C^p(A'')$. Unter Benutzung von Satz 3.3 schliessen wir, dass es ein $\alpha \in Co(X)$ und ein $c''_\alpha \in C^p_\alpha(A'')$

gibt mit $\rho^\alpha c''_\alpha = c''$. Können wir nun beweisen:

(3.25) Es gibt ein $\beta \ll \alpha$ und ein $c_\beta \in C_\beta^p(A)$ mit

$$g_\beta^\# c_\beta = \rho_\beta^\alpha c''_\alpha,$$

so sind wir fertig, weil dann $\rho^\beta c_\beta$ ein Urbild des beliebig gewählten c'' unter dem Homomorphismus $g^\#$ ist.

Zum Beweis von (3.25) beachten wir, dass nach Satz 1.6

$\mathcal{C}_\alpha^p(A) \rightarrow \mathcal{C}_\alpha^p(A'') \rightarrow 0$ exakt und daher $g^\#$ lokal ein Epimorphismus ist. Daher existiert eine Überdeckung

$\beta = \{V_j\}_{j \in J} \in \text{Co}(X)$ mit den Eigenschaften:

(1) Zu jedem $j \in J$ existiert ein $c_j \in C_\alpha^p(A)(V_j)$ mit

$$g_\alpha^\# c_j = c''_\alpha|_{V_j}.$$

(2) $\alpha \ll \beta$.

Nun sei $r \in X_\beta$ ein beliebiges p -Simplex und $s = \tau_\beta^\alpha r \in X_\alpha$.

Weiter sei $a''_r = \rho_\beta^\alpha c''_\alpha(r) = c''_\alpha(s)|_{\sigma(r)}$. Ist dann V_{j_r} irgendeine Ecke von r und a_r der Wert $c_{j_r}(s)$, so gilt

$a_r \in A(V_{j_r} \cap \sigma(s))$ und $g_{a_r} = c''_\alpha(s)|_{V_{j_r} \cap \sigma(s)}$. Wegen

$\sigma(r) \subseteq V_{j_r} \cap \sigma(s)$ gilt dann erst recht $g_{a_r}|_{\sigma(r)} = a''_r$. Ord-

nen wir also jedem $r \in X_\beta$ ein solches $a_r|_{\sigma(r)}$ zu, so erhalten

wir eine Cokette $c_\beta \in C_\beta^p(A)$, welche (3.25) befriedigt.

Damit haben wir gezeigt:

Satz 3.5 Die Funktoren $\mathcal{C}^p(X; A)$ und $C^p(X; A)$ sind exakt

auf den Kategorien der R -Prägarben und R -Garben.

Mittels bekannter Sätze der homologischen Algebra ¹⁾

erhält man hieraus:

Satz 3.6 (1) Die exakte Sequenz (3.22) induziert einen

Homomorphismus

$$(3.26) \quad \Delta: H^p(X; A'') \rightarrow H^{p+1}(X; A')$$

1) Vergleiche etwa [4] I, Theorem 2.1.1.

derart, dass die Cohomologiesequenz

$$(3.27) \quad 0 \rightarrow H^0(X; A') \rightarrow H^0(X; A) \rightarrow \dots \rightarrow H^{p-1}(X; A'') \xrightarrow{\Delta} H^p(X; A') \rightarrow H^p(X; A) \rightarrow H^p(X; A'') \xrightarrow{\Delta} H^{p+1}(X; A') \rightarrow \dots$$

exakt ist.

(2) Besitzt das kommutative Diagramm

$$(3.28) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & A & \rightarrow & A'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \rightarrow & B' & \rightarrow & B & \rightarrow & B'' \rightarrow 0 \end{array}$$

exakte Zeilen, so ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$(3.29) \quad \begin{array}{ccc} H^p(X; A'') & \xrightarrow{\Delta} & H^{p+1}(X; A') \\ \downarrow f''^* & & \downarrow f'^* \\ H^p(X; B'') & \xrightarrow{\Delta} & H^{p+1}(X; B') \end{array}$$

Wir geben hier nur die Definition von Δ an: Es sei $z'' \in Z^p(A'')$ ein Repräsentant der Restklasse $h'' \in H^p(A'')$. Da $g^\#$ ein Epimorphismus ist, gibt es ein $c \in C^p(A)$ mit $g^\# c = z''$ und $g^\# \delta c = \delta g^\# c = \delta z'' = 0$. Deshalb existiert ein eindeutig bestimmtes $c' \in C^{p+1}(A')$ mit $f^\# c' = \delta c$. Da $f^\#$ ein Monomorphismus ist, folgt aus $f^\# \delta c' = \delta f^\# c' = \delta \delta c = 0$ sogar $\delta c' = 0$. Also liegt c' in $Z^{p+1}(A')$ und definiert ein $h' \in H^{p+1}(A')$. Setzen wir $\Delta h'' = h'$, so beweist man leicht, dass diese Definition von der Wahl von z'' und c unabhängig ist und einen Homomorphismus liefert.

Aus Satz 3.6 ergibt sich in trivialer Weise:

Korollar 3.7 Die Folge $H^* = \{H^p(X; A)\}_{p \geq 0}$ ist eine verknüpfte exakte Sequenz kovarianter Funktoren auf den Kategorien der R-Prägarben bzw. R-Garben.

Zur Definition verknüpfter Sequenzen von Funktoren vergleiche man [2] III, §4 und V, §4.

Satz 3.8 Für jede Garbe A und jeden Garbenhomomorphismus $f: A \rightarrow A'$ ist $H^0(X; A) = Z^0(X; A) \simeq \Gamma(A)$ und die Homomorphismen $f(X): \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A')$ und f^* in der Dimension Null stimmen überein.

Der erste Teil des Satzes folgt aus Satz 1.2 durch Übergang zum direkten Limes. Andererseits ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}_\alpha^0(A) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{C}_\alpha^1(A) \\ & & \downarrow f & & \downarrow f^\# & & \downarrow f^\# \\ 0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & \mathcal{C}_\alpha^0(A') & \rightarrow & \mathcal{C}_\alpha^1(A') \end{array}$$

kommutativ und hat nach Satz 1.1 exakte Zeilen. Gehen wir damit zum direkten Limes über und wenden den linksexakten Funktor Γ an, so ergibt sich, dass $f(X)$ identisch ist mit dem Homomorphismus $Z^0(A) \rightarrow Z^0(A')$. Dieser stimmt aber mit dem Homomorphismus f^* in der Dimension Null überein.

§4 Der Isomorphiesatz.

Wir beweisen hier

Satz 4.1 Über parakompakten Räumen ist die durch H^* gegebene Cohomologietheorie mit Koeffizienten in R -Prägarben oder R -Garben identisch mit der Čechschen Cohomologietheorie. Lassen wir nur Garben als Koeffizientensysteme zu, so stimmen beide Theorien mit der Garben-Cohomologie, d.h. der Cohomologie der welchen Garbenauflösung, überein.

Beweis: I. Wir bezeichnen die Čechschen Cohomologiemoduln mit $\check{H}^p(A)$ und versehen alle Homomorphismen zwischen diesen

Moduln mit einem $\checkmark$. Nach Definition ist $\check{H}^p(A) = \lim_{\alpha} H_{\alpha}^p(A)$ wobei der Limes über alle offenen Überdeckungen α von X zu erstrecken ist. Ist $h_{\alpha} \in H_{\alpha}^p(A)$ ein Element, welches im Limes ein $\check{h} \in \check{H}^p(A)$ liefert, so gibt es nach Satz 2.1 ein $\beta \in \text{Co}(X)$ mit $\alpha < \beta$ und die Projektion $\check{\rho}^{*\alpha}: H_{\alpha}^p(A) \rightarrow \check{H}^p(A)$ kann über $H_{\beta}^p(A)$ faktorisiert werden. Daher können wir von vornherein annehmen $\alpha \in \text{Co}(X)$ und die Zuordnung $\chi: \rho^{*\alpha} h_{\alpha} \rightarrow \check{h}$ liefert einen Epimorphismus von $H^p(X; A)$ auf $\check{H}^p(A)$, wenn man Satz 1.4 beachtet. Ist aber $\check{h} = 0$, so gibt es eine Verfeinerung β von α mit $\rho^{*\alpha} h_{\alpha} = 0$ und wegen Satz 2.1 und 2.2 können wir annehmen $\beta \in \text{Co}(X)$ und $\alpha \ll \beta$. Dann ist aber $\rho^{*\alpha} h_{\alpha} = 0$ und χ ist auch ein Monomorphismus, also ein Isomorphismus.

Betrachten wir das Diagramm (3.21) einmal für die Čechsche Theorie und zum andern für unsere Theorie H^* , so folgt mit analoger Argumentation $\chi f^* = \check{f}^* \chi$. Schliesslich ist das von der Sequenz (3.22) induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(X; A'') & \xrightarrow{\Delta} & H^{p+1}(X; A') \\ \downarrow \chi & & \downarrow \chi \\ \check{H}^p(A'') & \xrightarrow{\check{\Delta}} & \check{H}^{p+1}(A') \end{array}$$

kommutativ, da die Definition von $\check{\Delta}$ vollkommen analog der Definition von Δ verläuft, wenn man davon absieht, dass man die Repräsentanten z'', c und c' (vgl. S.22 zur Bezeichnung) aus den Cokettengruppen geeigneter Überdeckungen wählen muss. Dies beweist den ersten Teil von Satz 4.1.

II. Zum Beweis des zweiten Teils benutzen wir den folgenden

Satz (vgl. [4] II, Abschnitt 4.8)

Es sei $T^* = \{T^n\}_{n \geq 0}$ eine verknüpfte exakte Sequenz

kovarianter additiver Funktoren auf der Kategorie der R -Garben, deren Werte R -Moduln sind. Ist dann $\tilde{H}^n$ der Funktor der n -ten Garben-Cohomologiegruppe, so existiert eine Folge funktorieller Isomorphismen

$$\xi^n: T^n \rightarrow \tilde{H}^n,$$

welche mit den verknüpfenden Homomorphismen Δ_T und $\Delta_{\tilde{H}}$ verträglich sind, sofern T^* folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Es gibt einen natürlichen Funktor-Isomorphismus

$$\eta^*: \Gamma(A) \rightarrow T^0(A).$$

(2) Für $n \geq 1$ ist $T^n(A) = 0$, wenn die Garbe A welk ist.

Für unsere Cohomologietheorie H^* ergibt sich Bedingung (2) durch Übergang zum Limes aus Satz 1.3. Die anderen Voraussetzungen sind nach 3.7 und 3.8 auch erfüllt. Damit ergibt sich die behauptete Isomorphie und Satz 4.1 ist bewiesen.

Bemerkung: In der Kategorie der Garben sind der erste und zweite Teil von Satz 4.1 äquivalent, da die Übereinstimmung der Čechschen und der Garben-Cohomologie bekannt ist. (vgl. [4] II, 5.10). Dort findet sich noch ein anderer Beweis für den zweiten Teil unseres Satzes skizziert, welcher wesentlich einen unserem Satz 3.3 analogen Satz benutzt. Für letzteren Satz fand sich jedoch kein Beweis in der Literatur.

Kapitel II Künnethformeln für kompakte Räume.

Wir stellen in §5 Sätze der homologischen Algebra zusammen welche uns in §6 gestatten eine Künnethformel zu beweisen und einige Anwendungen zu geben. In §7 beweisen wir eine analoge Formel für die Theorie mit Koeffizienten in Garben. Wir benutzen ohne weitere Erwähnung, dass die Čechsche Theorie mit Koeffizienten in Moduln identisch ist mit der Theorie mit Koeffizienten in den entsprechenden konstanten Prägarben. Daher können wir alle Ergebnisse des ersten Kapitels, insbesondere unsere Definition der Cohomologiemoduln verwenden.

Mit X und Y bezeichnen wir immer kompakte Räume. Z sei das kartesische Produkt $X \times Y$.

§5 Homologische Algebra.

Satz 5.1 (algebraische Künnethformel)

Sind die algebraischen Komplexe $C = \{C^p\}_{p \geq 0}$ und

$D = \{D^q\}_{q \geq 0}$ so beschaffen, dass

$$(5.1) \quad \text{Tor}(B(C), B(D)) = 0 = \text{Tor}(H(C), B(D))$$

$$\text{Tor}(B(C), Z(D)) = 0 = \text{Tor}(H(C), Z(D)),$$

so gibt es eine exakte Sequenz

$$(5.2) \quad 0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H^p(C) \otimes H^q(D) \xrightarrow{\varphi} H^n(C \otimes D) \xrightarrow{\psi} \\ \xrightarrow{\psi} \sum_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(C), H^q(D)) \rightarrow 0. ^1)$$

Wenn die Sequenzen

$$(5.3)a \quad 0 \rightarrow H^p(C) \rightarrow Z^p(C) \rightarrow B^p(C) \rightarrow 0$$

$$(5.3)b \quad 0 \rightarrow H^q(D) \rightarrow Z^q(D) \rightarrow B^q(D) \rightarrow 0$$

1) Mit Σ bezeichnen wir hier die Bildung direkter Summen.

aufspalten,¹⁾ so liefert die Sequenz (5.2) eine Darstellung von $H^n(C \otimes D)$ als direkte Summe.

Beweise hierzu finden sich bei [2] VI, Theorem 3.1 und IV, Satz 6.2.

Dabei seien $H^n(C \otimes D)$ die Cohomologiemoduln des Komplexes $C \otimes D = \{ \sum_{p+q=n} C^p \otimes D^q \}_{n \geq 0}$. Unter $H(C)$, $Z(C)$ usw. verstehen wir die Komplexe $\{H^p(C)\}_{p \geq 0}$, $\{Z^p(C)\}_{p \geq 0}$ usw., bei denen der Corandoperator der Nullhomomorphismus ist. Die Definition von φ und ψ ergibt sich aus folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H(C) \otimes B(D) & \rightarrow & H(C) \otimes Z(D) & \rightarrow & H(C) \otimes H(D) & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \varphi & & \\
 H(C \otimes B(D)) & \rightarrow & H(C \otimes Z(D)) & \rightarrow & H(C \otimes D) & \rightarrow & H(C \otimes B(D)) \rightarrow H(C \otimes Z(D)) \\
 & & & & \downarrow \psi & & \downarrow \alpha_1^{-1} \quad \downarrow \alpha_2^{-1} \\
 & & & & 0 \rightarrow \text{Tor}(H(C), H(D)) & \rightarrow & H(C) \otimes B(D) \rightarrow H(C) \otimes Z(D)
 \end{array}$$

Wegen (5.1) sind in diesem Diagramm die Zeilen exakt und α_1 und α_2 sind Isomorphismen.

Bemerkung: Vertauscht man in den Voraussetzungen die Rollen von C und D und benutzt dann den Isomorphismus $A \otimes B \rightarrow B \otimes A$, so erhält man eine mit (5.2) gleichlautende Sequenz. Die Homomorphismen φ dieser beiden Sequenzen sind identisch.

Satz 5.2 Es seien C und D algebraische simpliziale Komplexe. Dann gibt es Homomorphismen $\sigma: G^* \rightarrow F^*$ und $\tau: F^* \rightarrow G^*$ zwischen den Komplexen $F^* = \{C^p \otimes D^p\}_{p \geq 0}$ und $G^* = \{ \sum_{n+m=p} C^n \otimes D^m \}_{p \geq 0}$ so, dass $\tau\sigma$ homotop

1) Die Redeweise: "die Sequenz spaltet auf" besagt das gleiche wie: "die Sequenz liefert eine Darstellung als direkte Summe".

zur identischen Abbildung von G^* und $\sigma\tau$ homotop
zur identischen Abbildung von F^* ist.

Einen Beweis dieses Eilenberg-Zilber Theorems findet man
in [4] I, §3.10.

Der Corandoperator $\delta: C^p \otimes D^p \rightarrow C^{p+1} \otimes D^{p+1}$ wird hierbei erklärt
durch

$$(5.4) \quad \delta = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \delta_C^j \otimes \delta_D^j,$$

wobei $\delta_C^j: C^p \rightarrow C^{p+1}$ der Homomorphismus ist, welcher die Er-
zeugenden s^p von C^p den $s^{p+1} \in C^{p+1}$ als j -te Seite zuord-
net. δ_D^j ist entsprechend definiert.

Satz 5.3 Die Funktoren Tensorprodukt und Tor sind mit der
Bildung direkter Summen und direkter Limiten
vertauschbar. Das gleiche gilt für den Funktor H
angewandt auf algebraische Komplexe C .

Satz 5.4 Ist R ein Dedekindring, so ist $\text{Tor}(G, A) = 0$ für
alle R -Moduln G genau dann, wenn der R -Modul A
torsionsfrei ist.

Beweise dieser Sätze finden sich in [2].

Satz 5.5 Es seien A und B R -Moduln oder R -Garben über den
Räumen X und Y . Dann gilt

$$(5.5) \quad H^p(F^*) \simeq H^p(G^*) \text{ für } p \geq 0,$$

wobei

$$(5.6) \quad F^* = \{C^p(X; A) \otimes C^p(Y; B)\}_{p \geq 0},$$

$$(5.7) \quad G^* = \left\{ \sum_{n+m=p} C^n(X; A) \otimes C^m(Y; B) \right\}_{p \geq 0}.$$

Es sei nämlich $\alpha \times \beta \in \text{Co}(Z)$ und $F_{\alpha, \beta}^*$, $G_{\alpha, \beta}^*$ seien analog zu
 F^* und G^* definiert. $F_{\alpha, \beta}^*$ habe den durch (5.4) bestimmten
Corandoperator und der Corandoperator von F^* entstehe daraus
durch Übergang zum direkten Limes.

Nun sind $C^*(\alpha; A)$ und $C^*(\beta; B)$ simpliziale Cokettenkomplexe, auf welche Satz 5.2 angewandt werden kann. Dieser liefert dann den Isomorphismus $H^p(F_{\alpha, \beta}^*) \simeq H^p(G_{\alpha, \beta}^*)$. Damit erhalten wir das gewünschte Resultat:

$$H^p(F^*) \simeq H^p(\lim F_{\alpha, \beta}^*) \simeq \lim H^p(F_{\alpha, \beta}^*) \simeq \lim H^p(G_{\alpha, \beta}^*) \simeq H^p(\lim G_{\alpha, \beta}^*) \simeq H^p(G^*).$$

Da die in Satz 5.2 in Rede stehenden Homomorphismen σ und τ funktoriell konstruiert werden, ist der Übergang zum direkten Limes, der hier über alle $\alpha \times \beta \in \text{Co}(Z)$ zu erfolgen hat, erlaubt. Damit ist Satz 5.5 bewiesen.

§6 Eine Künnethformel mit Koeffizienten in Moduln.

Es seien jetzt A und B Moduln über einem Dedekindring R .

Lemma 6.1. Es ist $H^p(F^*) \simeq H^p(X \times Y; A \otimes B)$, wobei F^* durch (5.6) mit A, B statt A, B gegeben ist.

Beweis: Das Diagramm

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} C^p(\alpha; A) \otimes C^p(\beta; B) & \xrightarrow{\chi} & C^p(\alpha \times \beta; A \otimes B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^p(\alpha'; A) \otimes C^p(\beta'; B) & \xrightarrow{\chi} & C^p(\alpha' \times \beta'; A \otimes B) \end{array}$$

ist kommutativ für $\alpha \times \beta \ll \alpha' \times \beta'$ und $\alpha, \alpha' \in \text{Co}(X)$, $\beta, \beta' \in \text{Co}(Y)$. Da es aber im Nerv $Z_{\alpha \times \beta}$ nur endlich viele p -Simplizes gibt, sind $C^p(\alpha; A) \otimes C^p(\beta; B)$ und $C^p(\alpha \times \beta; A \otimes B)$ beide direkte Summen von soviel Exemplaren $A \otimes B$, wie es solche p -Simplizes gibt. Daher ist χ ein Isomorphismus. Unter Benutzung von Lemma 2.7 und der allgemeinen Definition der Čechschen Cohomologiemoduln beweist man nun die Isomorphie $\lim H^p(\alpha \times \beta; A \otimes B) \simeq H^p(Z; A \otimes B)$ ebenso, wie die erste Hälfte von Satz 4.1. Der direkte Limes ist über alle $\alpha \times \beta \in \text{Co}(Z)$

zu erstrecken. Durch Übergang zu den Cohomologiegruppen und Anwendung des direkten Limes erhält man nun aus (6.1) $H^p(F^*) = \varinjlim H^p(F^*_{\alpha, \beta}) \simeq \varinjlim H^p(\alpha \otimes \beta; A \otimes B) \simeq H^p(Z; A \otimes B)$. Damit ist Lemma 6.1 bewiesen.

Der Modul B sei nun torsionsfrei; dann sind auch $B^p(\beta; B)$ und $Z^p(\beta; B)$ torsionsfrei und daher $\text{Tor}(C, B^p(\beta; B)) = 0$ und $\text{Tor}(C, Z^p(\beta; B)) = 0$ für alle R-Moduln C nach Satz 5.4. Gehe wir damit zum Limes über, so folgt aus Satz 5.3, dass die Voraussetzungen (5.1) für die Komplexe $C^*(X; A)$ und $C^*(Y; B)$ erfüllt sind. Unter Benutzung der Isomorphismen von Satz 5 und Lemma 6.1 folgt daher aus Satz 5.1

Satz 6.2 Es seien A und B Moduln über dem Dedekindring R und B sei torsionsfrei. Dann gibt es für die Čechschen Cohomologiemoduln der kompakten Räume X, Y und $X \times Y$ eine exakte Sequenz

$$(6.2) \quad 0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H^p(X; A) \otimes H^q(Y; B) \rightarrow H^n(X \times Y; A \otimes B) \rightarrow \sum_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(X; A), H^q(Y; B)) \rightarrow 0.$$

Bemerkung: Die allgemeinste Voraussetzung für diesen Satz würde verlangen, dass für alle $\beta \in \text{Co}(Y)$ $B^p(\beta; B)$ und $Z^p(\beta; B)$ "platte" ¹⁾ Moduln über einem kommutativen Ring R mit Einselement sind. Ein Modul B heisst dabei platt, wenn $\text{Tor}_1(C, B) = 0$ für alle Moduln C und diese Bedingung ist gleichwertig damit, dass für alle Ideale I des Rings R der Homomorphismus $I \otimes B \rightarrow B$ ein Monomorphismus ist. Da dies natürlich für alle Moduln B der Fall ist, wenn der Ring ein Körper ist, erhalten wir:

1) französisch "module plat"; vergleiche [4] I, §5.3 zu dieser Begriffsbildung.

Satz 6.3 Sind A und B Vektorräume über einem Körper K, so gilt

$$(6.3) \quad \sum_{p+q=n} H^p(X; A) \otimes H^q(Y; B) \simeq H^n(X \times Y; A \otimes B).$$

Die Nerven X_α der Überdeckungen $\alpha \in \text{Co}(X)$ bilden zusammen mit den simplizialen Abbildungen τ_β^α ein inverses System. Bezeichnet X_∞ den simplizialen Komplex, den man als inversen Limes dieses Systems erhält, so kann nach einem Satz von G.Nöbeling [7] $C^p(X; A)$ aufgefasst werden als eine Untergruppe der Gruppe aller endlichwertigen ¹⁾ Coketten von X_∞ , sofern der Raum X kompakt ist. Besitzt nun X abzählbare Topologie, d.h. ist X kompakt-metrisch, so gibt es eine abzählbare konfinale Teilmenge von Überdeckungen aus $\text{Co}(X)$. Aus einfachen Mächtigkeitsbetrachtungen folgt dann, dass X_∞ nur abzählbar viele Simplizes besitzt. Nach E.Specker [9] gilt aber folgender

Satz: Ist S eine abzählbare Menge und A ein freier R-Modul, so ist die additive Gruppe aller Abbildungen $S \rightarrow A$, welche nur endlich viele verschiedene Werte $a \in A$ annehmen, frei.²⁾

In unserem Fall folgt hieraus, dass $C^p(X; A)$ frei ist, wenn der Modul A frei ist. Ist nun R ein Dedekindring, so sind auch die Untermoduln $B^p(X; A)$ frei. Daher spalten dann die Sequenzen (5.3) auf, da $B^p(X; A)$ isomorph zu $B^{p+1}(X; A)$ ist.

Wir haben also bewiesen:

1) "endlichwertig" ist im Sinne des nachfolgenden Satzes zu verstehen.

2) Specker hat diesen Satz bewiesen für den Fall, dass $A = \mathbb{Z}$ die Gruppe der ganzen Zahlen ist. Das allgemeine Ergebnis folgt durch Bildung von Tensorprodukten.

Satz 6.4 Sind A und B freie Moduln über dem Dedekindring R und sind die Räume X und Y kompakt-metrisch, so liefert die exakte Sequenz (6.2) eine Darstellung von $H^n(X \times Y; A \otimes B)$ als direkte Summe.

Diesen Satz kann man übrigens auch unter Benutzung der Fundamentalkomplexe von Steenrod [10] erhalten.

Bemerkung: Ist die Vermutung richtig, dass der Satz von Specker gültig bleibt, wenn man die Voraussetzung, dass S abzählbar ist, weglässt, so gilt Satz 6.4 für beliebige kompakte Räume X und Y.

Wenden wir Satz 6.2 auf den Spezialfall an, dass der Raum X einpunktig ist, so ergibt sich aus dem Dimensionsaxiom folgender

Satz 6.5 (Universelles Koeffiziententheorem)

Sind A und B Moduln über einem Dedekindring R, ist weiter B torsionsfrei und Y ein kompakter Raum, so ist folgende Sequenz exakt:

$$(6.4) \quad 0 \rightarrow A \otimes H^n(Y; B) \rightarrow H^n(Y; A \otimes B) \rightarrow \text{Tor}(A, H^{n+1}(Y; B)) \rightarrow$$

Ist B frei und Y kompakt-metrisch, so spaltet die Sequenz auf.

Aus diesem Satz und der Bemerkung zu Satz 5.1 folgt noch:

Satz 6.6 Sind A und B Moduln über einem Dedekindring und ist A torsionsfrei, so gilt:

$$(6.5) \quad A \otimes H^p(Y; B) \simeq H^p(Y; A \otimes B)$$

für jeden kompakten Raum Y.

§7 Eine Künnethformel mit Koeffizienten in Garben.

Es seien A und B R -Garben über den kompakten Räumen X bzw. Y . Wir definieren eine Garbe $A \hat{\otimes} B$ über $Z = X \times Y$, wie folgt:

- 1) Die Halme von $A \hat{\otimes} B$ über Punkten $(x, y) \in Z$ seien die Moduln $A(x) \otimes B(y)$.
- 2) Eine Abbildung $s: W \rightarrow \prod_{(x,y) \in W} A(x) \otimes B(y)$ für $W \subseteq Z$ heiße ein stetiger Schnitt in $A \hat{\otimes} B$, wenn jeder Punkt $(x, y) \in W$ eine Umgebung $U \times V \subseteq W$ hat so, dass es Schnitte $u_1, \dots, u_n$ bzw. $v_1, \dots, v_n$ aus $A(U)$ bzw. $B(V)$ gibt, derart dass für jeden Punkt $(x', y') \in U \times V$ der Wert von s gegeben wird durch $s(x', y') = \sum_{i=1}^n u_i(x') \otimes v_i(y') \in A(x') \otimes B(y')$.

Mit anderen Worten: Jeder stetige Schnitt in $A \hat{\otimes} B$ wird lokal durch ein Element aus $A(U) \otimes B(V)$ mit geeigneten U, V repräsentiert.¹⁾

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir noch folgende Bezeichnungen ein: $\gamma = \alpha \times \beta$, $C_Y^p = C^p(\alpha \times \beta; A \hat{\otimes} B)$, $C^p = C^p(X \times Y; A \hat{\otimes} B)$. Entsprechend seien H_Y^p und H^p definiert. Den Komplex $F_{\alpha, \beta}^*$ (vgl. S. 28) bezeichnen wir mit F_Y^* .

Obige Definition liefert für jedes $U \times V \subseteq Z$ einen Monomorphismus $\lambda: A(U) \otimes B(V) \rightarrow A \hat{\otimes} B(U \times V)$. Daher ist auch der Homomorphismus $\chi_Y: F_Y^* \rightarrow C_Y^*$ ein Monomorphismus.

Lemma 7.1 Zu jedem $c \in C_Y^p$ für $\gamma = \alpha \times \beta \in \text{Co}(Z)$ existiert eine Verfeinerung $\gamma' = \alpha' \times \beta'$ und eine simpliziale Zuordnung $\tau: \gamma' \rightarrow \gamma$ so, dass ρc im Bild

1) $A \hat{\otimes} B$ heisst bei Godement [4] totales Tensorprodukt. Es ist identisch mit dem Tensorprodukt der Urbildgarben von A und B unter den Projektionen $X \times Y \rightarrow X$ bzw. $X \times Y \rightarrow Y$.

von χ_Y , liegt, wobei $\rho: C_Y^p \rightarrow C_Y^p$, der durch τ induzierte Homomorphismus ist. ¹⁾

Es sei nämlich $\gamma = \{W_i\}_{i=1, \dots, n}$ und $\gamma'' = \{W_i''\}$ sei eine Schrumpfung von γ . Die Mengen W_i haben die Gestalt $U_i \times V_i$ und von den W_i'' können wir das gleiche annehmen. Zu jedem $(x, y) \in Z$ wählen wir nun eine offene Umgebung $W_{xy} = U_x \times V_y$ so aus, dass

- 1) Falls $(x, y) \in W_i$, so gilt $W_{xy} \subseteq W_i$.
- 2) Falls $(x, y) \in W_i''$, so gilt $W_{xy} \subseteq W_i''$.
- 3) Falls $W_{xy} \cap W_i'' \neq \emptyset$, so gilt $W_{xy} \subseteq W_i$.
- 4) Liegt (x, y) im Träger σ eines p -Simplex $s_Y \in Z_Y$, so wird $c(s_Y)|_{W_{xy}}$ durch ein Element $t_{xy} \in A(U_x) \otimes B(V_y)$ repräsentiert.

Nach Definition von $A \otimes B$ und weil γ endlich ist, lässt sich W_{xy} immer so wählen, dass (4) erfüllt ist. Die anderen Bedingungen lassen sich dann durch Verkleinerung der W_{xy} befriedigen.

$\gamma' = \{W_{xy}\}$ ist nun eine Überdeckung von Z . Wir wählen die Zuordnung $\tau: \gamma' \rightarrow \gamma$ so, dass $(x, y) \in W_i''$, falls $W_i = \tau W_{xy}$. Sei nun σ' der Träger eines p -Simplex $s_Y \in Z_Y$, mit den Ecken W_{xy}^j ($j = 0, \dots, p+1$). Nach Bedingung (3) und der Definition von τ folgt $W_{xy}^0 \subseteq \tau W_{xy}^j$ für $j = 0, \dots, p+1$, da $W_{xy}^0 \cap W_{xy}^j \neq \emptyset$. Daher liegt W_{xy}^0 im Träger von $s_Y = \tau s_{Y'}$. Nach (4) wird daher der Wert von ρc auf s_Y durch $t_{xy}^0|_{\sigma'}$ repräsentiert. Durchlaufen wir alle $s_Y \in Z_Y$, so ergeben

- 1) Die Grundidee des nachfolgenden Beweises stammt von Serre [8]. Dort wird sie benutzt um eine zu (3.25) analoge Aussage zu beweisen.

die $t_{xy}^0 | \sigma'$ ein Element $\bar{c} \in F_Y^*$, mit $\chi_Y, \bar{c} = \rho c$. Damit ist Lemma 7.1 bewiesen, wenn man davon absieht, dass γ' zwar aus lauter Produktmengen $U_X \times V_Y$ besteht, aber noch nicht die Gestalt $\alpha' \times \beta'$ hat, sondern nur Teilüberdeckung einer solchen Überdeckung ist. Nach Lemma 2.7 können wir aber eine Verfeinerung von γ' angeben, welche die Gestalt einer Produktüberdeckung hat und sogar in $\text{Co}(Z)$ liegt. Da aber die Werte von ρc durch Elemente aus geeigneten Moduln $A(U) \otimes B(V)$ repräsentiert wurden, gilt das erst recht, wenn wir die Mengen U und V verkleinern, indem wir zu einer solchen Verfeinerung übergehen. Damit ist Lemma 7.1 bewiesen.

Sei nun $\gamma = \alpha \times \beta \in \text{Co}(Z)$ und $c \in C_Y^P$. Aus Satz 2.1 und der letzten Bemerkung des Beweises schliessen wir, dass wir von dem in Lemma 7.1 konstruierten γ' sogar verlangen dürfen $\gamma' \in \text{Co}(Z)$ und $\gamma \ll \gamma'$. Der durch τ induzierte Homomorphismus ρ stimmt nun natürlich nicht überein mit dem Homomorphismus ρ_Y^Y , aus §3. Hingegen sind nach Satz 1.4 die induzierten Homomorphismen $\rho^*, \rho^*_{\gamma}^Y : H_Y^P \rightarrow H_Y^P$, identisch.

Sei nun $\chi_Y^* : H_Y^P(F_Y^*) \rightarrow H_Y^P$ der durch χ_Y induzierte Homomorphismus. Da das (6.1) entsprechende Diagramm kommutativ ist, ist der Übergang zum Limes erlaubt und wir erhalten einen Homomorphismus $\chi^* : H^P(F^*) \rightarrow H^P$. Nach Lemma 7.1 und der obigen Bemerkung existiert nun zu jedem $h \in H^P$ ein $\gamma \in \text{Co}(Z)$ und ein $h' \in H_Y^P$ so, dass es einen Cozyklus $c' \in C_Y^P$ gibt, welcher h' repräsentiert und der ausserdem ein Urbild $c'' \in F_Y^P$ unter dem Homomorphismus χ_Y hat. c'' repräsentiert dann ein $h'' \in H^P(F_Y^*)$ mit $\chi_Y^* h'' = h'$. Gehen wir damit zum Limes über, so erhalten wir aus h'' ein Urbild von h unter χ^* . χ^* ist also ein Epimorphismus.

Ist aber unser c' Corand eines Elementes $\bar{c}' \in C_Y^{p-1}$ und haben wir γ so gewählt, dass es ein $\bar{c}'' \in F_Y^{p-1}$ gibt mit $\chi_Y \bar{c}'' = \bar{c}'$, so ergibt sich aus $c' = \delta \chi_Y \bar{c}'' = \chi_Y \delta \bar{c}''$, dass auch $c'' = \delta \bar{c}''$ Corand ist. Da aber χ_Y , wie zu Anfang bemerkt ein Monomorphismus ist, ist dies die einzig mögliche Wahl von c'' . Infolgedessen zieht $h' = 0 \circ h'' = 0$ nach sich. Also ist χ^* auch ein Monomorphismus und wir haben auch im Fall von Garben:

Lemma 7.2 Es ist $H^p(F^*) \simeq H^p(X \times Y; A \hat{\otimes} B)$.

Nennen wir nun eine Garbe torsionsfrei, wenn ihre sämtlichen Schnittmoduln torsionsfrei sind,¹⁾ so können wir genau wie in §6 weiterschliessen und erhalten

Satz 7.3 Es seien A und B R -Garben über den kompakten Räumen X bzw. Y . R sei ein Dedekindring und B sei torsionsfrei. Dann gibt es für die Čechschen Cohomologiemoduln eine exakte Sequenz

$$(7.1) \quad 0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H^p(X; A) \otimes H^q(Y; B) \rightarrow H^n(X \times Y; A \hat{\otimes} B) \rightarrow \rightarrow \sum_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(X; A), H^q(Y; B)) \rightarrow 0.$$

Die Bemerkung nach Satz 6.2 überträgt sich entsprechend, wenn wir eine Garbe platt nennen, falls alle ihre Schnittmoduln (und damit auch alle ihre Halme) platt sind.

Insbesondere erhalten wir das Analogon von Satz 6.3:

Satz 7.4 Sind A und B K -Garben über den kompakten Räumen X bzw. Y und ist K ein Körper, so gilt:

$$(7.2) \quad \sum_{p+q=n} H^p(X; A) \otimes H^q(Y; B) \simeq H^n(X \times Y; A \hat{\otimes} B).$$

Bemerkung: Sind über den Räumen X und Y Ringgarben $\mathcal{O}_X$ bzw.

1) Das ist gleichwertig damit, dass alle Halme torsionsfrei sind.

$\mathcal{O}_Y$ erklärt, so lassen sich die Sätze des ersten Kapitels sämtlich auf Garben über diesen Ringgarben übertragen. Für die Sätze 7.3 und 7.4 trifft dies nur dann zu, wenn man die Ringgarbe $\mathcal{O}_{X \times Y}$ auffassen kann als $\mathcal{O}_X \hat{\otimes}_R \mathcal{O}_Y$ mit einem geeigneten Ring oder Körper R . Entsteht jedoch, etwa wie im komplex-analytischen Fall, $\mathcal{O}_{X \times Y}$ aus $\mathcal{O}_X \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y$ durch eine Art von "Komplettierung", so müssen ganz andere Methoden eingesetzt werden, um Ergebnisse zu erhalten, die etwa Satz 7.4 entsprechen. (vgl. L.Kaup [5]).

Literatur.

- [1] A.Borel and J.C.Moore: Homology theory for locally compact spaces, Michigan Math. J., vol. 7 (1960) pp. 137 - 159.
- [2] H.Cartan and S.Eilenberg: Homological Algebra, Princeton 1956.
- [3] S.Eilenberg and N.Steenrod: Foundations of algebraic topology, Princeton 1952.
- [4] R.Godement: Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Act. Sci. et Ind. 1252, Paris 1958.
- [5] L.Kaup: Eine Künnethformel für kohärente analytische Garben, Dissertation Erlangen 1965 (vervielfältigt).
- [6] H.-J. Kowalsky: Topologische Räume, Basel 1961.
- [7] G.Nöbeling: Zur Begründung der Čechschen Cohomologietheorie kompakter Räume, Manuskript.
- [8] J.-P. Serre: Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. (2), vol. 61 (1955) pp. 197 - 278.
- [9] E.Specker: Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen, Portugaliae Math., vol.9 (1950) pp. 131 - 140.
- [10] N.Steenrod: Regular cycles of compact metric spaces, Ann. of Math. (2), vol. 41 (1940) pp. 833 - 851.

Lebenslauf

Am 6. August 1937 wurde ich in Nürnberg als erstes Kind des Steuerinspektors Friedrich Goos und seiner Ehefrau Else, geb. Stählin, geboren. Von 1943 bis 1947 besuchte ich die Volksschulen in Neustadt/Aisch und Wilhermsdorf (Mfr.). Anschliessend trat ich in das Gymnasium mit Oberrealschule Neustadt/Aisch ein. 1950 kam ich an das Neue Gymnasium Nürnberg, wo ich 1956 die Reifeprüfung ablegte.

Seit dem Wintersemester 1956/57 studierte ich Mathematik, zunächst an der Universität Erlangen, vom zweiten bis zum fünften Semester an der Freien Universität Berlin. Dann kehrte ich nach Erlangen zurück und beschäftigte mich seitdem unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. G.Nöbeling mit algebraischer Topologie und homologischer Algebra. Im Februar 1962 bestand ich das Diplom-Examen für Mathematik mit einer Arbeit "Homologische Algebra über exakten Kategorien und Modulfamilien".

Seit März 1962 bin ich Assistent am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg. Neben meiner weiteren Beschäftigung mit algebraischer Topologie betreue ich die Rechenanlage des Instituts und bilde mich unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. W.Specht in Numerischer Mathematik fort.

Fotodruck

- Wiltrud Hogl, Erlangen, Brüxer Straße 9, (Nähe Röthelheimbad) Telefon 1636 -